TD n°2: Fonctions holomorphes et applications conformes

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

Exercice 1. Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$

1. Cours
2. On peut voir qu'en toute généralité, si D, D' vérifient la règle de Leibniz alors $uD + vD'$ la vérifie aussi, puisque
$$uD(fg) + vD'(fg) = uD(f)g + ufD(g) + vD'(f)g + vfD(g) = (uD + vD')(f)g + f(uD + vD')(g)$$
en réarrangeant les termes.
3. Pour le chemin le plus rapide, on peut être un peu malin.e et remarquer que $|f|^2 = f\overline{f}$, et $\overline{f}$ est antiholomorphe. Ainsi :
$$\begin{aligned}\Delta f\overline{f} &= 4\partial\overline{\partial}(f\overline{f})\\ &= 4\partial(f\overline{\partial}(\overline{f}))\\ &= 4\partial(f)\overline{\partial}(\overline{f})\\ &= 4|\partial(f)|^2\end{aligned}$$
qui est positive, et nulle ssi f est constante.
4. $\Delta = 4\partial\overline{\partial}$ donc $\Delta f = 4\partial\overline{\partial}f = 0$. Comme Δ préserve les parties réelles et imaginaires, on conclut. Pour le contre-exemple, $\log|z|$ est harmonique sur $\mathbb{C}^*$ car elle est la partie réelle d'une détermination locale du logarithme.
Les équations de Cauchy-Riemann nous assurent qu'une fonction holomorphe à valeurs imaginaires pures est constante, donc deux fonctions holomorphes de même partie réelle sont égales à constante près. Si $\log|z|$ était la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, alors elle serait égale sur le disque $\mathbb{D}(1,1)$ à $\log(z) + C$ avec C constante : sa dérivée serait donc $1/z$, ce qui est impossible car $1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ par le calcul
$$\int_{\mathbb{T}^1} \frac{dz}{z} = 2i\pi$$
5. On vérifie que si une détermination de $\log(f)$ existe sur un ouvert $V \subseteq U$, alors sa partie réelle est $\log|f|$ est sa partie imaginaire est $\arg(f)$. Pour l'existence d'une telle détermination localement au voisinage d'un point $a \in U$, il suffit de considérer un disque D suffisamment petit autour de a de sorte que $f(D)$ soit contenu dans le voisinage de $f(a)$ sur lequel un log complexe est défini (voir ci-dessous). De là, $\log(f(z))$ est défini comme fonction holomorphe et on a que $\log|f|$ est harmonique en a, donc harmonique globalement.

Note sur le log complexe
Si $z_0 \in \mathbb{C}^*$, et $w_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $e^{w_0} = z_0$, il existe une unique fonction holomorphe L_{w_0} définie au voisinage de z_0 vérifiant $e^{L(z)} = z$ et $L(z_0) = w_0$. On obtient cette fonction à partir de la fonction $\log(1+z)$ sur le disque unité, définie par la série entière usuelle
$$\log(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$
Cette fonction vérifie $e^{\log(1+z)} = 1 + z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et donc en posant $L_{w_0}(z) = w_0 + \log(1 + (z - z_0)/z_0)$, on a $e^{L_{w_0}(z)} = e^{w_0}(1 + (z - z_0)/z_0) = z$ sur le disque centré en z_0 et de rayon $|z_0|$.
On vérifie par ailleurs que $e^{\Re\left(L_{w_0}(z)\right)} = |z|$ donc $\Re\big(L_{w_0}(z)\big) = \log|z|$, et un raisonnement similaire donne $\Im\big(L_{w_0}(z)\big) = \arg(z) \pmod{2i\pi}$.

Exercice 2. Cauchy-Riemann polaire.
On travaille en coordonnées $z, \overline{z}$ au lieu de x, y, et on écrit $z = re^{i\theta}$, $\overline{z} = re^{-i\theta}$.
On calcule alors que si $\overline{\partial} f = 0$, on a par la règle de la chaîne :

$$\partial_r f(re^{i\theta}) = (\partial f)(re^{i\theta})e^{i\theta} + (\overline{\partial} f)(re^{i\theta})e^{-i\theta} = (\partial f)(re^{i\theta})e^{i\theta}$$

et

$$\partial_\theta f(re^{i\theta}) = (\partial f)(re^{i\theta})ire^{i\theta} - (\overline{\partial} f)(re^{i\theta})ire^{-i\theta} = (\partial f)(re^{i\theta})ire^{i\theta}.$$

On en conclut que $\partial_\theta f = ir\partial_r f$, ce qui donne l'égalité voulue en isolant partie réelle et imaginaire.

Exercice 3. Somme et produit réels

1. On pose $h = f - g$. On a
$$2i\Im(h) = f - g - \overline{f} + \overline{g} = f + \overline{g} - \overline{f + \overline{g}}.$$
Comme $f + \overline{g}$ est à valeurs réelles, $\Im(h)$ est identifiquement nulle, ce qui garantit que $\Re(h)$ est constante par Cauchy-Riemann.

2. On pose $h = f/g = \frac{f\overline{g}}{|g|^2}$, donc h est à valeurs réelles et elle est donc constante.

Exercice 4. Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ par l'algèbre linéaire.

1. On peut considérer une forme $\mathbb{R}$-linéaire f (à valeurs dans $\mathbb{R}$) sur V : elle n'est clairement pas $\mathbb{C}$-linéaire et donc $f(Jv) \neq if(v)$.

2. $J^2 + 1 = 0$ donc J est diagonalisable. La projection sur $W^{1,0}$ est donnée par $v \mapsto v - iJv$ et celle sur $W^{0,1}$ par $v \mapsto v + iJv$.

3. $W^{1,0}$ et le sous-espace vectoriel des formes $\mathbb{C}$-linéaires, et $W^{0,1}$ celui des formes $\mathbb{C}$-semilinéaires ($f(zv) = \overline{z}f(v)$).

4. Les coordonnées de df dans la base dx, dy sont $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. La projection de cette base sur les sous-espaces propres donne $dz = dx + idy, d\overline{z} = dx - idy$, et les coordonnées de df dans cette base sont bien ∂f et $\overline{\partial} f$. Pour le voir, il suffit d'écrire la matrice de la base $dz, d\overline{z}$ dans la base dx, dy, c'est la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$
Les coordonnées de df dans la base $dz, d\overline{z}$ sont obtenues en appliquant l'inverse de cette matrice, c'est-à-dire
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$
au vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$?

Exercice 5. Fonctions holomorphes en plusieurs variables

1. On décompose
$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j.$$
L'exercice précédent nous assure que
$$\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j = \partial_j(f) dz_j + \overline{\partial}_j(f) d\overline{z}_j$$

2. $\sum_j \overline{\partial}_j(f) d\overline{z}_j$ est la partie $\mathbb{C}$-antilinéaire de df, donc df est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle est nulle, ce qui revient à $\overline{\partial}_j f = 0$ pour tout j.

3. $$\Delta = 4\sum_j \partial_j \overline{\partial}_j.$$

Il en découle que pour f holomorphe, Δf est nul (car $\overline{\partial}_j f$ est nul). On prouve, similairement à l'exercice 1, que
$$\Delta |f|^2 = \sum_j |\partial_j f|^2$$
en écrivant $|f|^2 = f\overline{f}$.

4. Comme $\overline{\partial}_k f = 0$, on a nécessairement $\partial_j \overline{\partial}_k f = 0$. Comme $\partial_j \overline{\partial}_k = \overline{\partial}_k \partial_j$, on a $\overline{\partial}_k \partial_j \overline{f} = 0$. En sommant les égalités, on obtient $2\partial_j \overline{\partial}_k \Re(f) = 0$, et en soustrayant on obtient $2i\partial_j \overline{\partial}_k \Im(f) = 0$.
La piste pour trouver une fonction harmonique qui ne satisfait pas à ces équations est alors claire : on peut chercher $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\partial_1 \overline{\partial}_1 u = -\partial_2 \overline{\partial}_2 u$ mais $\partial_1 \overline{\partial}_1 u \neq 0$ (ce qui serait nécessaire pour être localement la partie réelle d'une fonction holomorphe).
On peut par exemple prendre $u(z_1, z_2) = \Re(z_1)^2 - \Re(z_2)^2$ qui vérifie
$$4\partial_1 \overline{\partial}_1 u = 1, 4\partial_2 \overline{\partial}_2 u = -1.$$

Exercice 6. L'anneau des fonctions holomorphes sur un compact

1. $\mathcal{O}\big(\overline{\mathbb{D}}(0, R)\big)$ est l'anneau des séries entières de rayon de convergence $> R$.
2. On va munir $\mathcal{O}(K)$ d'une structure d'anneau commutatif et vérifier quelques propriétés basiques.
   (a) 0 et 1 sont clairement analytiques au voisinage de K. Si f, g sont deux fonctions définies sur K, disons sur U et V, alors elles sont aussi définies sur $U \cap V$, où leur produit existe.
   (b) Soit $f \in \mathcal{O}(K)$ définie sur un voisinage U de K. L'ensemble des zéros de f est fermé dans U et disjoint de K. Par conséquent, $U \setminus V(f)$ est encore un voisinage ouvert de K, et $1/f$ y est bien définie.
   (c) Soient $f, g \in \mathcal{O}(K)$ définies sur un même voisinage U de K. Comme K est connexe, il est contenu dans une composante connexe de U, disons U_0. Si fg est nul sur un ouvert connexe, nécessairement f ou g est nul.
   (d) L'implication directe est claire, voyons la réciproque : Disons f, g définies sur un voisinage U, et supposons que f et g ne s'annulent que dans K. Il suffit de vérifier que la fonction f/g s'étend en une fonction analytique au voisinage de tout zéro de g. Pour cela, on développe f et g en série entière, on a $f(z) = (z-\alpha)^m f_0(z)$ et $g(z) = (z-\alpha)^l g_0(z)$ avec $m \geq l$. Ainsi, la fonction analytique $(z-\alpha)^{m-l} f_0(z)/g_0(z)$ est bien définie au voisinage de α, et coïncide avec f/g.
3. C'est le théorème des zéros isolés : si $V(I)$ admet un point d'accumulation, alors $V(f)$ admet un point d'accumulation pour tout $f \in I$ et donc f est nulle. $V(I)$ est donc discret dans K, donc fini.
4. Par définition, le polynôme choisi a des zéros inclus dans $V(f)$ pour tout $f \in I$, et les multiplicités des zéros du polynôme sont inférieures à celles de f, qui en est donc un multiple.
5. (a) On considère le développement à l'ordre $k+1$ de la fonction analytique $u(z) = \frac{1+(z-\alpha)^k}{g(z)}$. Comme $u(z)g(z) = 1 + (z-\alpha)^k$ et que les termes de degré $\leq k$ de $u(z)g(z)$ ne font intervenir que des termes de degré $\leq k$ de u et g, on a le résultat voulu.
   (b) On pose $s_i(z)$ un polynôme qui vérifie que $s_i(z)g(z)\prod_{j\neq i}\left(\frac{z-\alpha_j}{\alpha_j-\alpha_i}\right)^{k_j} = 1 + (z-\alpha_i)^{k_i} + ...$, et on vérifie que
   $$S(z) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j\neq i} \left(\frac{z-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}\right)^{k_j} s_i(z)$$
   convient.
   (c) On considère le polynôme S obtenu ci-dessus pour α_i les zéros de f et k_i l'ordre d'annulation de f en α_i. Il reste alors seulement à vérifier que $R(z) := \frac{1-S(z)g(z)}{f(z)}$ est une fonction analytique sur K, ce qui est clair car $1 - S(z)g(z)$ est par construction un multiple de f.

6. Commençons par $m = 2$: en divisant f_1 et f_2 par le polynôme

$$P_1(z) = \prod_{\alpha \in V(f_1) \cap V(f_2)} (z - \alpha)^{\min\left(\mathrm{ord}_\alpha(f_1), \mathrm{ord}_\alpha(f_2)\right)}$$

   On suppose qu'elles n'ont aucun zéro en commun. La question précédente donne R, S tels que $Rf_1/P + Sf_2/P = 1$, d'où $Rf_1 + Sf_2 = P_1$. La récurrence tombe en appliquant ce fait à P_{n-1} et f_n.

7. Soit I un idéal de $\mathcal{O}(K)$. On choisit pour chaque $\alpha \in K$ une fonction $f \in I$ qui s'annule à l'ordre minimal pour I en α. On rajoute des fonctions à cet ensemble jusqu'à avoir $f_1, ..., f_m$ telles que $\bigcap_i V(f_i) = V(I)$. C'est possible car $\bigcap_{f \in I} V(f) = V(I)$, donc on peut toujours, pour $\alpha \notin V(I)$, trouver une fonction dans I qui ne s'annule pas en α.

Exercice 7. Applications linéaires conformes

1. On considère une base orthonormée $(e_i)_i$ de V. Comme T est conforme, la base $(Te_i)_i$ est encore orthogonale, et directe. En la renormalisant, on obtient $U \in \mathrm{SO}(V)$ tel que TU^{-1} envoie e_i sur $\lambda_i e_i$. Quitte à changer U, on peut supposer $\lambda_i > 0$ pour tout i. Cette application linéaire est encore conforme, et donc

$$\sum \lambda_i^2 \alpha_i \beta_i = \langle TU^{-1}(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n), TU^{-1}(\beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n)\rangle = c \sum_i \alpha_i \beta_i.$$

   On trouve donc $\lambda_i^2 = c$ pour tout i (en choisissant $\alpha_j = 0$, $j \neq i$), donc $\lambda_i = \sqrt{c}$, ce qui conclut.

2. C'est l'isomorphisme habituel $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{T} \simeq \mathbb{C}^*$ (compatible à l'action sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$). Sur $\mathbb{C}^2$, on peut par exemple penser à

$$\begin{bmatrix} S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \end{bmatrix}$$

   où S est la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Toute matrice $\mathbb{C}$-linéaire sera de la forme

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

   où A, B, C, D sont des matrices de similitudes complexes.

Exercice 8. La sphère de Riemann comme espace projectif et l'action de PGL_2.

1. Si $[z : 1] = [z' : 1]$ alors $z/1 = z'/1$.

2. Si $(u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, alors soit $v \neq 0$ auquel cas $[u : v] = [u/v : 1]$, soit $v = 0$, auquel cas $[u : v] = [u : 0] = [1 : 0]$

3. Fait au tableau en TD.

4. Il faut vérifier que le point obtenu ne dépend pas des coordonnées choisies. Deux options : soit on remarque que l'application correspond à envoyer la droite $L = [z : w]$ sur gL, où g est la matrice correspondante, soit on remarque que la linéarité de l'application implique directement que $[\lambda z : \lambda w]$ est envoyé sur $[\lambda(az + bw) : \lambda(cz + dw)]$.
   Pour l'holomorphie, c'est vrai par définition d'une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbb{P}^1$.

5. Si l'on pose $w = 1$, on trouve la formule

$$[z : 1] \mapsto [az + b : cz + d] = \left[\frac{az + b}{cz + d} : 1\right].$$

6. Pour s'aider, on peut choisir où on envoie certains points du bord : par exemple, on peut choisir d'envoyer 1 sur 0 et -1 sur l'infini, ce qui donne une homographie de la forme $\frac{a(z-1)}{b(z+1)}$. On vérifie que le choix

$a = -i, b = 1$ donne bien une telle homographie car elle envoie $z = x + iy$ sur $\frac{2y+i(1-|z|^2)}{1+|z|^2+2x}$, qui est de partie réelle positive si $|z|^2 < 1$, et son inverse, donné par par $z \mapsto \frac{i-z}{z+i}$ envoie $x + iy$ sur

$$\frac{-x + i(1-y)}{x + i(y+1)}$$

dont le module est < 1 si $y > 0$.œ

7. L'homographie associée à une matrice g correspond à $L \mapsto g \cdot L$ pour L droite complexe dans $\mathbb{C}^2$. Ainsi, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est compatible à la composition, et l'inverse de l'homographie est donnée par l'inverse de la matrice associée.

8. Pour $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, g et λg donnent la même homographie. En particulier, en prenant ζ une racine carrée du déterminant de g, on a $\zeta^{-1} g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ qui est envoyé sur le même élément que g.

9. Supposons $\frac{az+b}{cz+d} = z$ pour tout z. L'équivalence en l'infini nous donne $a/d = 1, c = 0$. En évaluant en 0, on trouve $b/d = 0$, donc $b = 0$. On en conclut que la matrice correspondante est une homothétie.

Exercice 9. Images de droites par des homographies

1. L'équation du cercle de centre α et de rayon r est :

$$|z - \alpha|^2 = r^2$$

   et en développant

$$|z|^2 - 2\Re(\overline{z}\alpha) + |\alpha|^2 - r^2.$$

2. L'équation d'une droite s'écrit

$$ax + by + c = 0.$$

   En écrivant $2x = z + \overline{z}$, $2iy = z - \overline{z}$, on trouve :

$$\frac{a}{2}(z + \overline{z}) + \frac{b}{2i}(z - \overline{z}) + c = 0.$$

   Il suffit alors de poser $\alpha = \frac{a+ib}{2}$.

3. Le cas du cercle est le plus facile : on prend $-\beta$ son centre, $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = r$. Le cas de la droite est un peu plus délicat. On peut y arriver par calcul brut, mais aussi par raisonnement géométrique. L'idée est de voir la droite comme un cercle passant par l'infini : On commence alors par prendre une homographie qui envoie le cercle unité sur la droite réelle avec son point à l'infini (par exemple, celle qui identifie le disque unité au demi-plan de Poincaré !). On sait ensuite très bien envoyer $\mathbb{R}$ sur la droite de notre choix simplement par $z \mapsto e^{i\theta}z + u$ où $e^{i\theta}$ est la direction de la droite.

4. Impossible d'échapper aux calculs ici, sauf si l'on sait (par l'algorithme du pivot de Gauss) que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

   La tâche devient alors moins ardue, car il suffit de prouver que cercles sont préservés par les translations et les applications $z \mapsto \frac{z}{\lambda z+1}$. Le premier cas est clair, le deuxième l'est moins, mais on remarque que si $\lambda \neq 0$ alors

$$\frac{z}{\lambda z + 1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda \cdot (\lambda z + 1)}.$$

   On vient d'écrire l'homographie comme composition de translations, d'homothéties (qui préservent clairement les cercles) et de l'application $z \mapsto -1/z$, dont on peut vérifier sans peine qu'elle les préserve aussi. Sinon, simplement quelques conseils / directions pour les calculs : Si α est nul, on a clairement un cercle. On suppose qu'il ne l'est pas, et on peut alors diviser par α et changer nos variables en β', γ', δ'. De même, on peut opérer une translation de β' pour n'avoir plus que γ'' et δ'' à gérer. De là, les calculs deviennent plus digestes. Il faut différencier le cas $|\gamma''| = 1$, qui donne une droite, et $|\gamma''| \neq 1$ qui fait arriver à un cercle de rayon $|\delta''|$ après réarrangement des termes.

5. C'est une reformulation de la question précédente.